

# 数学全真模拟试卷（一）

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）。第 I 卷 1-2 页，第 II 卷 3-4 页，共 4 页。考生作答时，须将答案答在答题卡上，在本试题卷、草稿纸上答题无效。满分 150 分，考试时间 120 分钟。考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回。

## 第 I 卷（选择题，共 60 分）

注意事项：

1. 选择题必须使用 2B 铅笔在答题卡上将所选答案对应的标号涂黑。
2. 第 I 卷共 1 个大题，15 个小题，每个小题 4 分，共 60 分。

### 一、选择题（每小题 4 分，共 60 分）

在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{3, 4\}$ ，则  $A \cup B =$  ( )  
 A.  $\{3\}$                       B.  $\{2, 3\}$                       C.  $\{1, 4\}$                       D.  $\{1, 2, 3, 4\}$
2. 函数  $f(x) = \log_2(x - 1)$  的定义域为 ( )  
 A.  $\{x | x > 0\}$                 B.  $\{x | x \neq 1\}$                 C.  $\{x | x > 2\}$                 D.  $\{x | x > 1\}$
3.  $\cos \frac{3\pi}{4} =$  ( )  
 A.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$                       B.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. 设向量  $\mathbf{a} = (2, 1)$ ， $\mathbf{b} = (1, m)$ ，若  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ，则  $m =$  ( )  
 A.  $-\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $-2$                       D.  $2$
5. 函数  $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$  的单调递减区间是 ( )  
 A.  $(-\infty, -3]$                 B.  $[-4, +\infty)$                 C.  $[4, +\infty)$                 D.  $(-\infty, 4]$
6. 函数  $f(x) = \sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x$  的最小正周期和振幅分别是 ( )  
 A.  $\pi, 1$                       B.  $\pi, 2$                       C.  $2\pi, 1$                       D.  $2\pi, 2$
7. 若直线的斜率为 5，在  $y$  轴上的截距为 -7，则该直线的方程是 ( )  
 A.  $5x - y - 7 = 0$             B.  $5x - y + 7 = 0$             C.  $5x + y - 7 = 0$             D.  $5x + y + 7 = 0$
8. 不等式  $|x + 3| \leq 5$  的解集为 ( )  
 A.  $\{x | -8 \leq x \leq 2\}$                       B.  $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$

- C.  $\{x|x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 2\}$  D.  $\{x|x \leq -8 \text{ 或 } x \geq -2\}$
9. 双曲线  $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{6} = 1$  的焦点坐标是 ( )
- A.  $(-3, 0), (3, 0)$  B.  $(0, -3), (0, 3)$   
 C.  $(-2, 0), (2, 0)$  D.  $(0, -2), (0, 2)$
10. “ $x = 1$ ”是“ $x^2 - 1 = 0$ ”的 ( )
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
11. 有一批材料可以建成 24m 的围墙，如果用此材料围成一块矩形场地，中间用相同材料隔成三个面积相同的矩形，则围成的矩形场地最大值为 ( )
- A.  $12\text{m}^2$  B.  $18\text{m}^2$  C.  $24\text{m}^2$  D.  $32\text{m}^2$
12. 为了得到函数  $y = 2 + \ln(x - 1)$  的图像，只需把函数  $y = \ln x$  的图像上所有点 ( )
- A. 向左平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位  
 B. 向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位  
 C. 向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位  
 D. 向右平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位
13. 设  $m, n$  为两条不重合的直线， $\alpha, \beta$  为两个不重合的平面，下列命题中为真命题的是 ( )
- A. 若  $m // \alpha, n \subset \alpha$ , 则  $m // n$   
 B. 若  $m // \alpha, n // \beta, \alpha // \beta$ , 则  $m // n$   
 C. 若  $m \perp \alpha, n \perp \beta, \alpha \perp \beta$ , 则  $m \perp n$   
 D. 若  $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m // \beta$ , 则  $\alpha // \beta$
14. 某医院为支援河北疫情，从 4 名医生和 6 名护士中选派 2 名医生和 3 名护士参加援冀医疗小分队，不同的选派方法共有 ( )
- A. 40 种 B. 60 种 C. 80 种 D. 120 种
15. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数，且  $f(x + 5) = f(x - 3)$ ，当  $x \in [0, 4)$  时， $f(x) = \log_2(x + 1)$ ，则  $f(2021) =$  ( )
- A. 3 B. -3 C. -2 D. 2

## 第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

### 注意事项:

1. 非选择题必须用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔在答题卡上题目所指示的答题区域内作答。作图题可先用铅笔绘出，确认后再用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔描清楚。答在试题卷上无效。

2. 第 II 卷共 2 个大题，11 个小题，共 90 分。

## 二、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

16.  $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中的常数项是\_\_\_\_\_.

17. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \log_4 x, & x > 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \leq 0 \end{cases}$ , 则  $f\left[f\left(\frac{1}{16}\right)\right] =$ \_\_\_\_\_.

18. 若  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  是夹角为  $60^\circ$  的两个单位向量, 向量  $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , 则  $|\mathbf{c}| =$ \_\_\_\_\_.

19. 已知直线  $x + ay - 3 = 0$  经过  $(1, 2)$ , 则该直线与圆  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$  相交所得的弦长为\_\_\_\_\_.

20. 《莱茵德纸草书》是世界上最古老的数学著作之一, 书中有一道这样的题目: 把 100 个面包分给 5 人, 使每人所得成等差数列, 且使最大的三份之和的  $\frac{1}{3}$  是最小的两份之和, 则最小一份的面包个数是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分)

解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

21. (本小题满分 10 分)

甲、乙等五名大学生报名参加了北京冬奥会志愿者, 被随机的分到  $A, B, C, D$  四个不同的岗位服务, 每个岗位至少有一名志愿者.

(1) 求甲、乙两人同时参加  $A$  岗位服务的概率;

(2) 设随机变量  $X$  为这五名志愿者中参加  $A$  岗位服务的人数, 求  $X$  的分布列和数学期望.

22. (本小题满分 12 分)

已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比不为 1, 前  $n$  项和为  $S_n$ , 满足  $S_5 = \frac{33}{16}$ , 且  $a_2, a_4, a_3$  成等差数列.

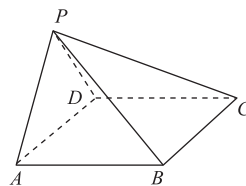
(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和  $S_n$ .

23. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥  $P - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是边长为 2 的菱形,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $\angle APD = 90^\circ$ , 且  $PA = PD$ ,  $AD = PB$ .

- (1) 求证:  $AD \perp PB$ ;  
 (2) 求四棱锥  $P - ABCD$  的体积.



24. (本小题满分 12 分)

在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = \frac{\pi}{4}$ ,  $AC = 4$ ,  $\cos B = \frac{1}{3}$ .

- (1) 求  $\sin C$  的值;  
 (2) 求  $\triangle ABC$  的面积.

25. (本小题满分 12 分)

已知抛物线的顶点为原点, 准线为  $2x - 3 = 0$ .

- (1) 求抛物线的标准方程;  
 (2) 过抛物线焦点的直线, 被抛物线所截的线段长为 9, 求此直线的方程.

26. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x)$  是二次函数, 且  $f(0) = 0$ ,  $f(x + 1) = f(x) + x + 1$ .

- (1) 求  $f(x)$  的解析式;  
 (2) 若  $f(x) > a$  在  $x \in [-1, 1]$  上恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

# 数学全真模拟试卷（二）

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）。第 I 卷 1-2 页，第 II 卷 3-4 页，共 4 页。考生作答时，须将答案答在答题卡上，在本试题卷、草稿纸上答题无效。满分 150 分，考试时间 120 分钟。考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回。

## 第 I 卷（选择题，共 60 分）

注意事项：

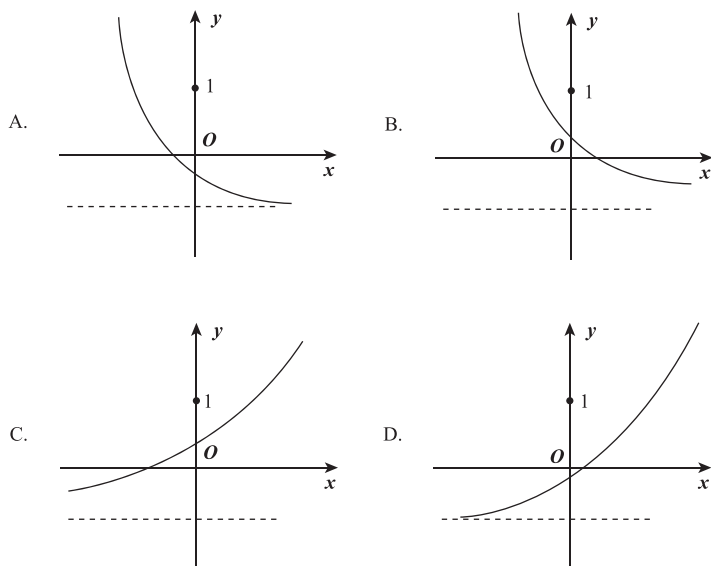
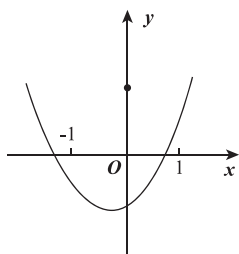
1. 选择题必须使用 2B 铅笔在答题卡上将所选答案对应的标号涂黑。
2. 第 I 卷共 1 个大题，15 个小题，每个小题 4 分，共 60 分。

### 一、选择题（每小题 4 分，共 60 分）

在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若  $A = \{x \mid |x| = 1\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$ ，则  $A \cap B =$  ( )  
 A.  $\{3\}$                       B.  $\{1\}$                       C.  $\{1, -1\}$                       D.  $\{-1\}$
2. 函数  $y = \sqrt{27 - 3^x}$  的定义域为 ( )  
 A.  $[3, +\infty)$                       B.  $(-\infty, 3]$                       C.  $[-3, 3]$                       D.  $[0, 3]$
3. 已知  $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，则  $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha =$  ( )  
 A.  $-\frac{1}{5}$                       B.  $-\frac{3}{5}$                       C.  $\frac{1}{5}$                       D.  $\frac{3}{5}$
4. 函数  $y = (\sin x - \cos x)^2 - 1$  是 ( )  
 A. 最小正周期为  $2\pi$  的偶函数                      B. 最小正周期为  $2\pi$  的奇函数  
 C. 最小正周期为  $\pi$  的偶函数                      D. 最小正周期为  $\pi$  的奇函数
5. 设向量  $\mathbf{a} = (2, -1)$ ， $\mathbf{b} = (x, 3)$ ，若  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ，则  $x =$  ( )  
 A.  $-\frac{3}{2}$                       B.  $\frac{3}{2}$                       C.  $-6$                       D.  $6$
6. 过点  $P(1, 1)$  且与直线  $3x - 4y + 5 = 0$  垂直的直线方程是 ( )  
 A.  $4x + 3y - 7 = 0$                       B.  $3x - 4y - 1 = 0$                       C.  $4x + 3y - 1 = 0$                       D.  $3x - 4y + 1 = 0$
7. 不等式  $|3 - 2x| < 1$  的解集为 ( )  
 A.  $(-2, 2)$                       B.  $(2, 3)$                       C.  $(1, 2)$                       D.  $(3, 4)$
8. 抛物线  $y = 4x^2$  的准线方程为 ( )  
 A.  $y = -\frac{1}{16}$                       B.  $y = -\frac{1}{8}$                       C.  $y = -\frac{1}{4}$                       D.  $y = -\frac{1}{2}$

9. 某台小型晚会由 6 个节目组成，演出顺序有如下要求：节目甲必须排在前两位，节目乙不能排在第一位，节目丙必须排在最后一位，该台晚会节目演出顺序的编排方案共有 ( )
- A. 36 种                      B. 42 种                      C. 48 种                      D. 54 种
10. 若  $a = 5^{0.2}$ ,  $b = 0.5^{0.2}$ ,  $c = 0.5^2$  则  $a, b, c$  之间的大小关系是 ( )
- A.  $a > b > c$                   B.  $b > a > c$                   C.  $c > a > b$                   D.  $b > c > a$
11. “向量  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ” 是 “ $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ” 的 ( )
- A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件
- C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件
12. 下面四个命题：
- (1) 如果一条直线垂直于一个平面内的无数条直线，那么这条直线和这个平面垂直
- (2) 过空间一定点有且只有一条直线和已知平面垂直
- (3) 一条直线垂直于一个平面内的两条直线，则这条直线垂直于这个平面
- (4) 垂直于同一平面的两条不重合的直线互相平行
- 其中正确的个数为 ( )
- A. 1                                      B. 2                                      C. 3                                      D. 4
13. 已知函数  $f(x) = (x - a)(x - b)$  (其中  $a > b$ )，若  $f(x)$  的图像如图所示，则函数  $g(x) = a^x + b$  的图像是 ( )



14. 已知函数  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 若对于  $x \geq 0$ , 都有  $f(x+2) = f(x)$ , 且当  $x \in [0, 3)$  时,  $f(x) = \log_2(x+1)$ , 则  $f(-2020) + f(2021) =$  ( )
- A. -2                      B. -1                      C. 1                      D. 2
15.  $(x-1)^7$  的二项式展开式中系数最小的项是 ( )
- A. 第 4 项                      B. 第 6 项                      C. 第 5 项                      D. 第 4 项和第 6 项

## 第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

### 注意事项:

1. 非选择题必须用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔在答题卡上题目所指示的答题区域内作答。作图题可先用铅笔绘出, 确认后再用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔描清楚。答在试题卷上无效。

2. 第 II 卷共 2 个大题, 11 个小题, 共 90 分。

### 二、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

16.  $\frac{\log_3 8}{\log_3 2} =$  \_\_\_\_\_.

17. 半径为 1 的扇形面积也为 1, 则其圆心角的弧度数是\_\_\_\_\_.

18. 已知向量  $\mathbf{a} = (2, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (-2, 3)$ , 则  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$  \_\_\_\_\_.

19. 在等比数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_1 = 1$ ,  $a_4 = -8$ , 则公比  $q =$  \_\_\_\_\_.

20. 抛物线  $y^2 = 4x$  与直线  $2x - y - 2 = 0$  交于  $A, B$  两点, 则弦长  $|AB| =$  \_\_\_\_\_.

### 三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分)

解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

21. (本小题满分 10 分)

已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 公比  $q > 0$ , 且  $S_8 = 255$ ,  $S_4 = 15$ , 求  $a_n$ .

22. (本小题满分 12 分)

盒子里装有五个大小相同的球, 其中两个编号为 1, 两个编号为 2, 一个编号为 3, 从盒子里任取两个小球, 完成以下工作:

(1) 求取出的两个小球中, 含有编号为 3 的小球的概率;

(2) 在取出的两个小球中, 设编号的最大值为  $X$ , 求随机变量  $X$  的分布列和数学期望.

23. (本小题满分 12 分)

在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $2\sin^2(B+C) - 3\cos A = 0$ .

(1) 求  $\angle A$  的大小;

(2) 若  $\angle B = \frac{\pi}{4}$ ,  $a = 2\sqrt{3}$ , 求边长  $c$ .

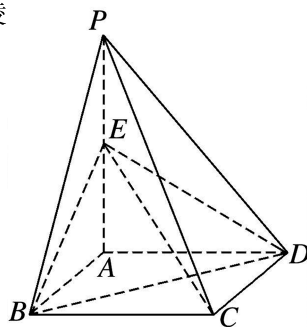
24. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面是边长为 1 的正方形, 侧棱  $PA \perp$  底面  $ABCD$ , 且  $PA=2$ ,  $E$  是侧棱  $PA$  上的动点.

(1) 求四棱锥  $P-ABCD$  的体积;

(2) 如果  $E$  是  $PA$  的中点.

求证:  $PC \parallel$  平面  $BDE$ .



25. (本小题满分 12 分)

已知直线  $l: mx - y + 4 = 0$  和圆  $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ .

(1) 若直线  $l$  和圆  $C$  相切, 求  $m$  的值;

(2) 若直线  $l$  和圆  $C$  相交于  $M, N$  两点, 且弦  $MN$  的长为  $2\sqrt{3}$ . 求  $m$  的值.

26. (本小题满分 12 分)

设二次函数  $f(x) = ax^2 + (b-2)x + 2b - 3a$  是定义在  $[-6, 2a]$  上的偶函数.

(1) 求二次函数  $f(x)$  的解析式;

(2) 求不等式  $2^{f(x)} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$  的解集.